De l'infini à l'absolu

Quis leget haec ? Perse. Satire I, vers 2.[1]

Que siginifient ces deux mots « infini » et « absolu » ? L'infini est-il absolu ?

Celui qui pose ce genre de questions prend le risque de se trouver rangé dans la catérogie des Tubald Holopherne, des Josselin Bridé[2] et autres « abstracteurs de quintessence ». Il y a, dira-ton, tant de problèmes vitaux à régler que l'on a autre chose à faire que de perdre son temps à s'amuser à ces fantaisies. Et on peut constater que les philosophes contemporains sont très occupés par le mal vivre de nos sociétés. Ils ont raison de s'en occuper. Ils auraient tort de ne pas participer à la sauvegarde de l'humanité. Mais il y a autre chose. Ce n'est pas parce que nous avons à améliorer notre quotidien, ou que nous sommes en danger que nous ne pouvons pas prendre le temps de contempler la voûte étoilée. Et d'aillleurs les beautés naturelles ne contribuent-elles pas à la qualité de notre quotidien ? Je voudrais vous faire admirer quelque chose d'aussi fascinant que la voûte étoilée, mais à l'intérieur de l'esprit humain.

Avant d'aborder les représentations que nous nous faisons de l'absolu et de l'infini, je dois poser deux principes sur lesquels je vais établir ma réflexion.

1) L'être est nécessairement. C'est cette idée que Parménide formulait ainsi : « L'être est, le non-être n'est pas ».[3] C'est une vérité d'évidence : s'il y avait du non-être, ce non-être serait et il ne serait pas non-être. La logique moderne classique[4] a démontré rationnellement cette évidence par le théorème de la double négation.

Et puisqu' il est logique que l'être soit, il est logique que l'être soit logique. Il est superflu de se demander pourquoi il y a quelque chose plutôt que rien. L'être est un fait qui trouve sa nécessité dans sa propre logique, dans son être même.

2) l'être est nécessairement infini. Puisque le non-être n'est pas, il n'y a pas de néant au-delà de l'être. L'être n'a pas de limites. L'infinité de l'être a été affirmée par Mélissos de Samos, un autre philosophe présocratique.[5]

*

. * *

Reconnaître l'infini est certainement une des plus belles perfomances de l'esprit humain. Qu'est-ce que l'infini pour les hommes ? Essayons de détailler.

Les hommes ont imaginé l'infini. Ils se sont représenté un monde matériel : des mers au-delà des terres, des terres encore au-delà de ces mers et ainsi de suite tant qu'ils pouvaient maintenir leur attention. Il se sont représenté un chaos, matière sans forme, dépourvue de toute ordonnance logique et illimitée, ou une masse liquide, « L'esprit de Dieu planait sur les eaux », nous dit le livre

1 « Qui lira cela ? »
2 Cf. Rabelais.
3 Philosophe présocratique.
4 Théorème que n'utilise pas la logique intuitionniste.
5 Paradoxalement Parménide pensait que l'être était fini, Mélissos a réctifié. Sur ces deux points, cf. mes articles Méditations et Certitudes laïques

de La Genèse. Il ont contempé la voûte étoilée, se sont dit que ce qu'ils en voyaient n'en était qu'une infime partie. Mais notre imagination est vite dépassée, toujours bornée par un horizon ou par nos capacités visuelles ou imaginatives.

La raison, au cours de l'histoire de la pensée occidentale, a suppléé aux défaillances de l'imagination. L'infini est conçu et ils essentiellement le produit de la raison mathématique. Par elle c'est même une multitude d'infinis qui se sont révélés à l'entendement humain. En voici quelques exemples.

Le plus simple est l'infini des nombres naturels (entiers positifs) : {0, 1, 2, 3, … }.

Ensuite vient tout de suite à l'esprit (au moins à notre époque)[6] l'infini des nombres négatifs : { … -3, -2, -1, 0}.

L'observation même des nombres naturels ou négatifs nous révèle deux sous-ensembles : les nombres pairs et les nombres impairs. Chacun de ces sous-ensembles est lui-même infini. Ce qui fait mentir le vieil axiome selon lequel la partie est plus petite que le tout. Déjà nous voyons que les concepts dépassent notre imagination.

Entre chaque nombre, naturel ou négatif, il y a une coupure, une discontinuité disons, pour employer une image spatiale, une distance que l'on peut parcourir en la divisant en d'autres nombres. Ce sont les nombres rationnels. Et comme on peut théoriquement recommencer à l'infini la division entre les nombres rationnels successivement trouvés, on en vient à la conclusion qu'entre chaque nombre entier et le suivant il ya un infinité de nombres rationnels. C'est ce qui faisait dire à Zénon d'Elée, à une époque où les mathématiciens Grecs représentaient les nombres par des segments de droite, qu'Achille ne rattraperait pas la tortue ; il aurait toujours une fraction d'espace à parcourir.[7] Nous comprenons donc qu'il y a autant d'infinis qu'il y a d'intervalles entre les nombres naturels ou négatifs : une infinité d'infinis.

Les mathématiques modernes ne sont pas en reste. En 1895 Cantor[8] nous a offert une théorie de l'infini remarquable et remarquée par ses confrères en la discipline. Je me risque à l'exposer comme suit.

Cantor travaille sur les nombres naturels dans le contexte de la théorie des ensembles.
Le *cardinal* d'un ensemble est le nombre d'éléments contenus dans cet ensemble.
La réflexion repose sur le prinicpe qu'**avec un ensemble de *n* éléments (cardinal *n*) je peux combiner 2^n ensembles.**

Il est facile de le comprendre au moyen de l'exemple suivant.
Soit un ensemble à trois éléments : {1, 2,3}.
Combien d' ensembles puis-je créer avec ces trois éléments ?
1) je peux choisir de ne prendre aucun des éléments. C'est choisir *un* ensemble vide { }.
2) Je peux créer des sous-ensembles chacun de cardinal 1 : {1} {2} {3}.
Cela me donne *trois* ensembles possibles.
3) Je peux créer des sous-ensembles chacun de cardinal 2 : {1,2} {1,3} {2,3}.
Ici je ne tiens pas compte de l'ordre des éléments donc {1,2} est équivalent à {2,1} etc.

6 J'inclus cette parenthèse parce que la notion de nombre négatif, inventée en Inde, fut tardivement admise en Occicent.
7 Zénon n'était pas sot. Il posait un problème.
8 Georg Cantor, mathématicien allemand 1845-1918

J'obtiens *trois* ensembles possibles.
4) Je peux garder l'ensemble dans sa totalité : {1, 2, 3}.
Une seule solution.

Un total de *huit* solutions.

Huit ensembles possibles avec un ensemble de cardinal 3 .
$8 = 2^3$ C'est un cas particulier de 2^n lorsque le cardinal de l'ensemble est égal à *n*.

N. B. Ce raisonnement n'est pas une démonstration, c'est seulement un exemple pour comprendre.

Pour plus de commodité j'introduis le signe M qui désigne de façon générale le cardinal d'un ensemble.
Dans notre exemple ci-dessus $M = 3$ et $2^3 = 8$. Evidemment $3 < 8$.
En généralisant nous dirons $\mathbf{M < 2^M}$.

J'introduis aussi le signe $\aleph_0$ (alèph zéro) par lequel Cantor désigne le cardinal de l'ensemble infini.

On connaît l'ordre croissant des cardinaux : $0 < 1 < 2 < 3\ldots$ etc.
Il en va ainsi jusqu'à l'infini, on aura donc :: $0 < 1 < 2 < \ldots. < \aleph_0$
Lorsque $M = \aleph_0$, $M < 2^{\aleph_0}$
Lorsque $M = 2^{\aleph_0}$ $M < 2^{2^{\aleph_0}}$
(Je n'ai pas trouvé avec mon logiciel le moyen d' écrire correctement l'exposant de la dernière expression ;il faut lire : M plus petit que 2 puissance 2 puissance aleph 0. Cette remarque vaut aussi pour la e expression de la série suivante.)
On va donc obtenir la série suivante :

$$\mathbf{0 < 1 < 2 < \ldots < \aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \ldots \quad etc.}$$

Ainsi l'infini s'accroît exponantiellement.[9] Ce qui revient à dire que des infinis sont plus grands que d'autres, et ceci à l'infini. Cette idée paraît contradictoire. Intuitivement bien sûr. Mais Cantor nous la fait concevoir avec la clarté d'une démonstration mathématique.

A l'observation de ces dimensions insondables nous vient à l'esprit l'image de ces galaxies qui s'éloignent les unes des autres à la vitesse de la lumière. Mais pour que la comparaison fût satisfaisante il faudrait imaginer que ces galaxies, arrivées aux limites de notre monde font un bond dans au autre univers alors que chaque numération arrivée à l'infini séchappe dans un autre infini. Et ceci sans durée, dans le présent éternel de la raison. Nous hommes, espèce de primates évolués, qui pensons dans le temps, ne pouvons pas effectuer ce genre de numération, mais nous pouvons, guidés par un mathématicien, les concevoir grâce à un raisonnement qui tient sur une page.

Enfin, je voudrais évoquer, plus proche de notre quotidien, mais non moins merveilleux, l'infini linguistique révélé par Ferdinand de Saussure : la possibilité théorique que nous offre chaque langue humaine de trouver à l'infini de nouvelles expresssions. Evidemment il s'agit d'une possibilité théorique puisque chaque homme, ainsi que l 'humanité toute entière, est limité par la

9 Ce raisonnement est exposé par S.G. Kleene in Mathematical logic, pp. 91-193 de la traduction française de Jean Largeault, A. Colin 197

durée de son existence. Néanmoins, concrètement, nous en profitons amplement car c'est grâce à cet infini que nous trouvons, chaque fois que nous voulons nous exprimer, des phrases que personne n'a dites ou écrites avant nous. Nous ne sommes pas libres d'inventer les mots ou les règles de grammaire, si nous voulons nous faire comprendre. Disons que l' innovation en ces deux domaines est risquée et qu'il faut des conditions très spéciales pour s'y lancer. Mais la langue, par le moyen de ses règles et de son vocabulaire limités offre des possibilités de combinaisons à l'infini. Bien sûr il existe des expressions figées. Il est vrai aussi qu'il nous arrive de répéter ce que nous avons entendu ou lu. Ce sont, mis à part, par exemple, le travail des comédiens, la plupart du temps des imprécations, des invectives, des proverbes, toujours des phrases courtes car elles supposent un apprentissage par coeur. Mais quand nous voulons prendre le temps de nous exprimer, quand nous réfléchissons à ce que nous disons, quand nous choissons nos mots et que nous construisons nos phrases, nous inventons des formulations nouvelles. C'est ce qui fait que l'on peut avoir conscience que le texte que l'on compose à tel ou tel moment n'a jamais été dit ou écrit depuis les origines de l'humanité. Et il en sera ainsi pour tous les hommes à venir.

*
* *

L'absolu est facile à comprendre : c'est ce au-delà de quoi il n'y a rien. L'ensemble de tous les ensembles, conceptuels ou perceptibles, réels ou imaginaires. L'absolument absolu, l'être total, qui par conséquent englobe l'infini.

On parle couramment d'absolus restreints chacun à un domaine particulier. Ils sont extrêmement divers. On dira « absolument fascinant », « parfaitement[10] réussi », « le nec plus ultra de… » etc. Mais ces expressions sont des abus de langage car elles sont relatives à tel ou tel domaine d'application. Un homme très bon n'est pas absolument bon car même si sa bonté est parfaite pour un être humain, on peut imaginer, comme font les religions, des êtres meilleurs. La perfection d'un cheval de dressage n'est pas celle qu'un gardian demande à la monture qu'il utilise pour diriger les manades. Euler[11] cherchait une brique parfaite : une brique dont toutes les dimensions, longueur, largeur, hauteur, diagonales des faces et diagonale du corps (d'un coin au coin opposé) soient mesurées par un nombre entier d'unités. Si ce genre de parallélépipèdes existe, sa perfection n'est que relative aux parallélépipèdes. L'être absolu se divise en une multitude d'êtres relatifs les uns aux autres et qui, s'il leur arrive de posséder absolument une qualité ne sont que des absolus relatifs. La contradiction des termes nous montre que l'on a affaire à un abus de langage. Il n'y a, si l'on respecte rigoureusement le sens des mots, qu'un absolu : l'être infini dans sa totalité. Cet absolu est essentiellement logique, puisque l'être est logique. C'est pourquoi tout ce qui est à portée de notre connaissance s'explique logiquement.

Voilà donc la réponse à mes questions initiales l'absolu c'est l'être infini dans sa totalité. Et cet être absolu est nécessairement puisqu'il n'y a pas de non-être.

Donnons-lui le nom que le voudra : « Deus », «Le monde[12] », « Deus sive natura[13] »… Les philosophes des lumières et les révolutionnaires de 1789 disaient « l'être suprême ». Cette appélation rappelle un peu « l'esprit de Dieu qui planait sur les eaux ». Je préfère l'absolu.

Gilbert NANCY Août 2019

10 Le préfixe « per » du mot signifie l'idée d'achevèment ; on ne peut mieux faire, que ce qui est parfait ; en ce sens « perfection » exprime un absolu.
11 Mathématicien du XVIII° siècle.
12 Les stoïciens
13 Spinoza